9.17 Rezept: EW & EV von f_A bestimmen.

$$K^n \xrightarrow{f_A} K^n \qquad (A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n))$$

1. Berechne $\chi_A(X) = \det(A - X \cdot \mathbb{1}_n)$
2. Bestimme alle Nullstellen $a_1, \dots, a_\ell$ von χ_A. Das sind die EW von f_A.
3. Löse für jeden EW a_i das LGS

$$\underbrace{(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n)}_{n \times n\text{-Matrix}} \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

$$\mathrm{Eig}(f_A; a_i) = \mathcal{L}(A - a_i \cdot \mathbb{1}_n).$$

$\square$

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \circlearrowleft f = f_A, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

1

$$\chi_f = \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 & \boxed{0} \\ 1 & 2-X & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{5-X} \end{pmatrix}$$

$$= (5-X) \cdot \det \begin{pmatrix} 2-X & 1 \\ 1 & 2-X \end{pmatrix}$$

$$= (5-X)\left((2-X)^2 - 1\right)$$

② $\chi_f = (5-x)((2-x)^2-1)$

$\ldots$

$= (5-x)(x-1)\cdot(x-3)$

EW sind $5, 1, 3$.

③ EW 5:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;]\,3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; |\cdot \tfrac{-1}{8} \;|\;]\,3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Eig}(f; 5) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

EW 1:

$$\mathrm{Eig}(f; 1) = \ldots = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

EW 3:

$$\mathrm{Eig}(f; 3) = \ldots = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$